

DOI: 10.7652/xjtuxb201305009

求解 Stokes 方程的最小二乘等几何分析方法

陈德祥¹, 徐自力¹, 刘石², 冯永新²

(1. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安;

2. 广东电网公司电力科学研究院, 510080, 广州)

摘要: 针对采用 C^0 型基函数的最小二乘有限元需增加辅助独立变量的问题, 提出了一种改进的方法——最小二乘等几何分析方法。采用具有高阶光滑性的非均匀有理 B 样条作为基函数, 直接用原始变量定义最小二乘泛函, 建立了求解 Stokes 方程的改进算法。该方法不需引入新独立变量, 且网格可在数值分析中自动生成并能精确表达区域的几何形状。用所提出的方法求解了二维不可压 Stokes 流动, 计算结果与解析解符合较好, 表明该方法可用于 Stokes 方程的求解, 提高基函数光滑性的 k 细化具有指数收敛速度。

关键词: 最小二乘有限元法; 最小二乘等几何分析方法; Stokes 方程; k 细化

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)05-0051-05

Least Squares Isogeometric Analysis for Stokes Equation

CHEN Dexiang¹, XU Zili¹, LIU Shi², FENG Yongxin²

(1. State Key Lab for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Electric Power Research Institute of Guangdong Power Grid Corporation, Guangzhou 510080, China)

Abstract: Additional independent variables are needed in the least squares finite element method (LSFEM) using C^0 element. An improved method, the least squares isogeometric analysis (LSIGA) was proposed to substitute LSFEM. In LSIGA, the high continuity non-uniform rational B-spline (NURBS) was applied as the basis function and only the primitive variables in the Stokes equation were adopted to define the least squares functional. LSIGA does not need additional independent variables, and it can generate the mesh automatically in analysis and the mesh represents the domain geometry exactly. An incompressible 2D Stokes flow was solved with the present method. The numerical solution agrees well with the analytical solution. The results show that the method proposed is applicable for solving the Stokes equation and its k -refinement increasing the NURBS continuity in analysis has an exponential convergence rate.

Keywords: least squares finite element method; least squares isogeometric analysis; Stokes equation; k -refinement

Stokes 方程描述了小雷诺数下的流动, 在这种流动中黏性的作用占主导, 对流项可忽略, 如滑动轴承的轴套和轴颈之间润滑油的流动。最小二乘有限元法是一种求解 Stokes 方程的数值方法, 它相对于

混合有限元法的优点是: 可以自然满足 inf-sup (或 LBB) 条件^[1-2], 不存在数值稳定性问题, 即使对非自伴随问题, 所得的线性系统的系数矩阵也是对称正定的。该方法近年来得到了越来越多的关注^[3-8]。

收稿日期: 2012-09-17。 作者简介: 陈德祥(1979—), 男, 博士生; 徐自力(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家“973 计划”资助项目(2011CB706505); 国家自然科学基金资助项目(50675169)。

网络出版时间: 2013-02-25

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130225.1723.003.html>

最小二乘有限元法的缺点是需要采用高阶连续的基函数。对二阶偏微分方程,直接应用最小二乘有限元法求解需要采用 C^1 型单元,即基函数在单元边界上具有连续的一阶导数,但是现有方法构造的 C^1 型单元与 C^0 型单元相比过于复杂。文献中多将控制方程转化为等价的一阶偏微分方程组再应用最小二乘有限元法求解^[3]。通过转化虽然可以采用简单易用的 C^0 型单元,但却产生了另外两个新问题:①转化过程中必须引入新的独立变量,如涡量^[4-5]、应力^[6]和速度梯度^[3]等,这增加了系统的自由度数,导致计算成本增加;②基于转化后的一阶方程很难定义范数等价的最小二乘泛函,从而导致解的最优性丧失^[7-8]。

解决最小二乘有限元法问题的关键在于构造出简单易用且具有高阶连续性的基函数。Hughes 等提出采用非均匀有理 B 样条(NURBS)基函数进行数值计算,将它用于有限元分析,建立了基于 Galerkin 变分的等几何分析方法^[9]。NURBS 基函数在单元边界上可以很容易得到 C^1 连续,并且可以通过 CAD 中成熟的升阶算法来提高可导阶数^[10]。由于采用这种基函数还具有收敛速度快、网格可自动生成、空间离散精确等特点,故得到了越来越多的关注^[11-13]。

本文将这种具有高阶连续性的 NURBS 基函数用于最小二乘有限元法,建立了一种新的数值方法——最小二乘等几何分析方法,并用该方法求解了 Stokes 方程。

1 最小二乘等几何分析方法

1.1 Stokes 问题的最小二乘变分方程

黏性不可压流动在小雷诺数下忽略对流项后的控制方程为如下无量纲 Stokes 方程

$$\left. \begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f} & \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{v}$ 为速度; p 为压力; $\mathbf{f}$ 为外部作用力; μ 为动力黏度; Ω 为计算区域; Γ 是区域的边界; $\mathbf{x}$ 是计算区域中的点。不失一般性,取 $\mu=1$ 。

由于 Stokes 问题的压力解包含任意常数,为使其解唯一,需要指定某个参考点的压力值,即 $p(\mathbf{x}_0) = p_0$ 。

将速度的各个分量和压力合在一起写成向量形式,并记 $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, p)^T$,用控制方程的余量可定义如下最小二乘泛函

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\| -\Delta \mathbf{v} + \text{grad} p - \mathbf{f} \|^2 + |\nabla \cdot \mathbf{v}|^2) d\Omega \quad (2)$$

式中: $\| \cdot \|$ 为向量的模。

如果 $\mathbf{u}$ 是 Stokes 方程的唯一解,那么它使最小二乘泛函在某个函数空间 U 取最小值,即对任意 $\mathbf{w} \in U$

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{w}) \quad (3)$$

由于 J 是凸的二次泛函,上式等价于泛函的一阶变分为 0

$$\delta J(\mathbf{u}) = 0 \quad (4)$$

由此可得到如下变分形式

$$\text{求 } \mathbf{u} \in U, B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in U \quad (5)$$

式中: $\mathbf{w} = (\mathbf{v}', p')^T$; $F(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} (-\Delta \mathbf{v}' + \nabla p') \cdot \mathbf{f} d\Omega$; $B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} [(-\Delta \mathbf{v} + \nabla p)(-\Delta \mathbf{v}' + \nabla p') + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \cdot \mathbf{v}')] d\Omega$ 。

有限维空间上的变分形式为

$$\text{求 } \mathbf{u}^h \in U^h, B(\mathbf{u}^h, \mathbf{w}^h) = F(\mathbf{w}^h), \quad \forall \mathbf{w}^h \in U^h \quad (6)$$

选择 U^h 中一组线性无关的函数 $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n\}$ 为基函数,近似解可由基函数表达为

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{N}_i \quad (7)$$

用式(6)对基函数逐个检验,得到如下代数方程

$$\mathbf{K}^h \mathbf{c}^h = \mathbf{b}^h \quad (8)$$

式中: $K_{i,j}^h = B(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j)$; $b_i^h = F(\mathbf{N}_i)$; 上标 h 表示代数方程与网格尺寸有关。由于 J 是凸的二次泛函,因此系数矩阵是对称正定的。

本文只考虑齐次 Dirichlet 边界,边界条件的满足通过在代数方程中划去行和列的方法来实现,如果边界条件包含非齐次项或 Neumann 边界条件,可以在最小二乘泛函中增加边界项来满足。

1.2 基于 NURBS 的有限维空间构造

1.2.1 NURBS 基函数 p 次 B 样条基函数为光滑连接的分段多项式

$$N_{i,p} = \omega_{i,p} N_{i,p-1} + (1 - \omega_{i+1,p}) N_{i+1,p-1} \quad (9)$$

$$\text{式中: } \omega_{i,p} = \begin{cases} \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p-1} - \xi_i} & \xi_i \neq \xi_{i+p-1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; N_{i,0} =$$

$\begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 。给定 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 为节点向量,节点可重复但非减,即对任意 $1 \leq i < j \leq n+p+1$, $\xi_i \leq \xi_j$ 。本文考虑的节点向量为两端均重复 p

+1 次的向量。

二维 B 样条基函数通过一维基函数张量积来定义

$$N_{i,p;j,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta) \quad (10)$$

NUBRS 基函数是为了精确表达圆锥曲线而对 B 样条基函数所做的扩展,它通过 B 样条基函数来定义。一维、二维 NUBRS 基函数分别为

$$R_i^p = N_{i,p}\omega_i / \sum_{i'=1}^n N_{i',p}\omega_{i'} \quad (11)$$

$$R_{i,j}^{p,q} = N_{i,p;j,q}\omega_{i,j} / \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^m N_{i',p;j',q}\omega_{i',j'} \quad (12)$$

式中: ω 为控制点的权常数。三维 NURBS 基函数可通过类似方式定义。

NURBS 基函数具有以下性质^[9], 它们与数值计算紧密相关。

(1) 构成单位分解: 所有基函数的和在任意一点为 1, 单位分解性质保证了 NURBS 基函数具有完备性。

(2) 具有局部支撑性: 任意一个基函数只在有限范围内非 0, 在其他区域内恒为 0, 这使刚度矩阵具有稀疏性的特点, 可以通过“组装”的方式得到。

(3) 连续性可控: 在重复度为 m 的节点处具有 $p-m$ 阶连续导数, 从这个性质可以构造出具有 C^1 连续的基函数, 应用升阶算法可以构造更高光滑性的基函数。

1.2.2 有限维空间构造 由 NURBS 可构造出有限维空间 U^h 。以二维问题为例, 用 NURBS 基函数可将一个二维区域写成参数化形式

$$\mathbf{x} = S(\xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_{i,j} R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \quad (13)$$

式中: $\mathbf{a}_{i,j}$ 是控制点; $\xi = (\xi, \eta)$ 是参数空间的坐标。

假定 NURBS 基函数 $R_{i,j}^{p,q}$ 的总数为 n , 对所有基函数进行编号并记为

$$\tilde{N}_1(\xi), \tilde{N}_2(\xi), \dots, \tilde{N}_n(\xi) \quad (14)$$

参数化方程定义了参数空间到物理空间的映射

$$S: \xi \mapsto \mathbf{x} \quad (15)$$

如果参数化映射是可逆的一一映射, 其逆为 S^{-1} , 那么通过逆映射可得到物理域内一组基函数

$$\tilde{N}_1(S^{-1}(\mathbf{x})), \tilde{N}_2(S^{-1}(\mathbf{x})), \dots, \tilde{N}_n(S^{-1}(\mathbf{x})) \quad (16)$$

取相同的有限维空间来逼近速度两个方向的分量和压力, 定义如下向量值函数

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) &= (\tilde{N}_i(S^{-1}(\mathbf{x})), 0, 0)^T \\ \mathbf{N}_{n+i}(\mathbf{x}) &= (0, \tilde{N}_i(S^{-1}(\mathbf{x})), 0)^T \quad i = 1, \dots, n \\ \mathbf{N}_{2n+i}(\mathbf{x}) &= (0, 0, \tilde{N}_i(S^{-1}(\mathbf{x})))^T \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

用于函数逼近的有限维空间由这 $3n$ 个函数张成, $U^h = \text{span}(\mathbf{N}_1(\mathbf{x}), \mathbf{N}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{N}_{3n}(\mathbf{x}))$ 。空间的维数或代数方程的自由度数由节点向量决定。

1.3 代数方程的建立

1.3.1 网格自动生成与细化 网格可由节点向量和参数化映射自动生成。从节点向量中去掉重复节点可得两个子向量 $\{\xi'_i\}$ 和 $\{\eta'_j\}$, 定义参数空间中的单元为 $(\xi'_i, \xi'_{i+1}] \times (\eta'_j, \eta'_{j+1}]$, 则所有单元的集合构成参数区域的一个剖分。通过式(15)可得物理区域的剖分, 如图 1 所示。

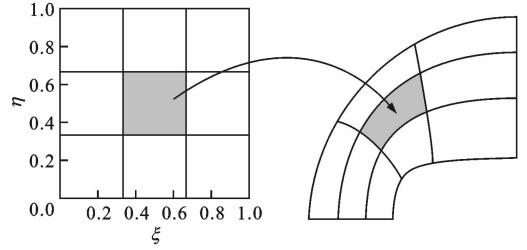


图 1 计算区域离散示意图

这种离散方式与传统有限元法不同。如果计算区域是通过 NURBS 定义的, 确定计算区域的参数化形式就自然形成了一组剖分, 网格尺寸由定义基函数的节点向量决定, 网格的细化可通过节点插入算法实现。因此, 网格的生成和细化可用程序自动完成, 不需要专门进行空间离散过程。由于区域是通过 NURBS 定义的, 自动产生的剖分精确表达了计算区域, 不会引入空间离散误差。实际上 NURBS 是定义 CAD 几何对象的标准方式, 采用 NURBS 基函数进行计算, 能使几何设计和数值分析无缝结合。

1.3.2 刚度矩阵及右端项计算 由式(8)可得代数方程的系数矩阵为

$$K_{i,j} = B(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} -\Delta N_{i,1} + \partial N_{i,3}/\partial x \\ -\Delta N_{i,2} + \partial N_{i,3}/\partial y \\ \partial N_{i,1}/\partial x + \partial N_{i,2}/\partial y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Delta N_{j,1} + \partial N_{j,3}/\partial x \\ -\Delta N_{j,2} + \partial N_{j,3}/\partial y \\ \partial N_{j,1}/\partial x + \partial N_{j,2}/\partial y \end{bmatrix} d\Omega \quad (18)$$

右端项为

$$b_i = F(\mathbf{N}_i) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} -\Delta N_{i,1} + \partial N_{i,3}/\partial x \\ -\Delta N_{i,2} + \partial N_{i,3}/\partial y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (19)$$

以上两个积分通过逐个单元高斯积分再求和得到, 式中 $N_{i,k}$ 表示第 i 个基函数的第 k 个分量。由于 NURBS 基函数具有局部支撑性质, 当 $\mathbf{N}_i$ 和 $\mathbf{N}_j$ 的支集不相交时, 对应的系数 $K_{i,j}$ 为 0, 不需要进行

计算。因此,在程序实现中刚度阵 $\mathbf{K}$ 的生成过程与有限元方法类似,对单元进行循环,在该单元上对有支撑的基函数进行数值积分。

2 算例分析

考虑图 2 所示 $1/8$ 圆环区域上的二维 Stokes 流动,计算区域定义成式(13)的参数化形式,它在两个方向上的节点向量为

$$\mathbf{E} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \quad (20)$$

$$\mathbf{H} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \quad (21)$$

控制点为

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} (1, 0) & (1, \tan\theta/2) & (\cos\theta, \sin\theta) \\ (1.5, 0) & (1.5, \tan\theta/2) & (1.5\cos\theta, 1.5\sin\theta) \\ (2, 0) & (2, \tan\theta/2) & (2\cos\theta, 2\sin\theta) \end{bmatrix} \quad (22)$$

控制点上对应的权为

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta/2 & 1 \\ 1 & \cos\theta/2 & 1 \\ 1 & \cos\theta/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中: $\theta = \pi/4$ 是该区域的圆周角度。由式(20)~(23)定义的区域初始网格包括一个单元,它的基函数 C^1 连续。

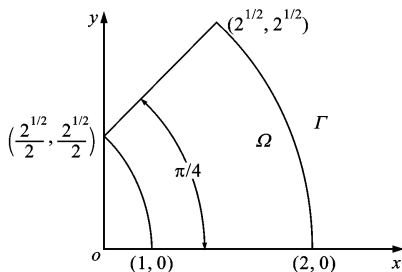


图 2 二维 Stokes 问题 $1/8$ 圆环计算区域

令速度场和压力场分别为

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} g(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ -g(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$p = -\frac{5\pi}{2} + 20\arctan \frac{y}{x} \quad (25)$$

式中: $g = (x-y)y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)$ 。

取载荷 $\mathbf{f} = -\mu\Delta\mathbf{v} + \nabla p$, 则上面两式中给出的速度场和压力场是 Stokes 方程在图 2 的 $1/8$ 圆环区域中的解析解, 显然在边界上速度为 0。

采用 20×20 均分网格, 取次数为 4 的基函数进行计算。图 3、图 4 是 x 、 y 两个方向上的速度分布云图, 图 5 是压力分布云图, 可以看出速度场和压力

的分布与精确解符合很好。

有限元法获得收敛解有两种途径: 一是加密网格, 称为 h 细化; 二是提高基函数多项式的次数, 称为 p 细化。这两种方法都不会改变基函数在单元边界处的光滑性。节点插入算法的作用与 h 细化类似, 插入非重复的节点后网格被加密; 升阶算法的作用与 p 细化类似。通过节点插入可实现 h 细化, 通过升阶再插入重复节点可实现 p 细化。如果升阶之后不插入重复节点, 所得到的基函数既提高了基函数的次数, 也提高了基函数的光滑性。这种方式既不同于 h 细化, 也不同于 p 细化, 称为 k 细化。

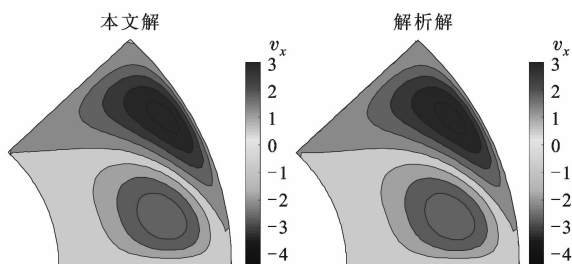


图 3 x 方向速度分布

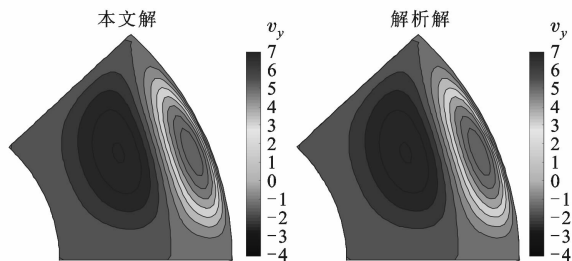


图 4 y 方向速度分布

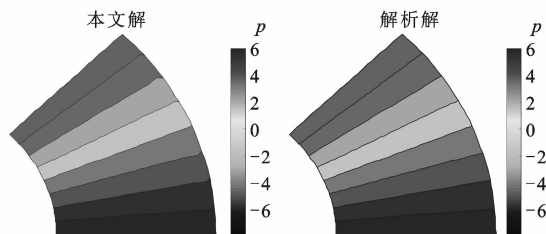


图 5 区域压力分布

为研究 h 细化和 k 细化的收敛性, 定义近似解的误差范数为

$$\|\epsilon^h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (u - u^h)^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (26)$$

图 6 是进行 h 细化时解的收敛过程, 随着网格尺寸的减小, 网格数增加, 数值解的误差快速下降。

图 7 是保持 20×20 均匀网格不变的情况下进行 k 细化时解的收敛过程, 误差随基函数光滑性升

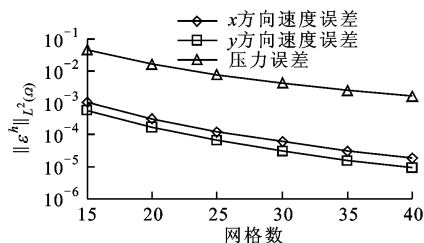
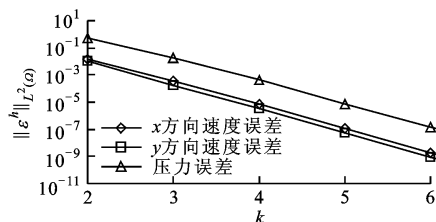


图6 数值解误差随网格数的变化

高以指数规律减小。图6、图7都表明在 h 细化和 k 细化时,速度场比压力场的收敛速度快。分析图7可看出,压力场在 k 时的误差与速度场在 $k+1$ 时的误差相当,因此若取压力基函数的次数比速度基函数高1阶,则压力与速度具有同样的收敛速度。

图7 数值解误差随基函数光滑性的变化(20×20 网格)

3 结 论

基于NURBS基函数与最小二乘法建立了最小二乘等几何分析,并用于求解了Stokes问题,结论如下:

(1)NURBS基函数很容易实现高阶连续性,满足了最小二乘有限元法对基函数的要求,不需要增加辅助变量,并且解是有限维空间的最优解;

(2)如果计算区域是用NURBS定义的,那么网格生成和加密都可以自动实现,自动生成的网格精确表达了计算区域,可以通过 k 细化提高数值解的收敛性;

(3)二维Stokes方程的求解结果表明,该方法具有很好的精确性和收敛性,不会产生混合有限元法中数值稳定性问题;

(4)提高基函数的光滑性可显著提高收敛速度,采用 k 细化时数值解近指数速度收敛,速度与压力采用相同基函数时,速度场比压力场收敛速度更快。

参考文献:

[1] BABUŠKA I. Error-bounds for finite element method [J]. Numerische Mathematik, 1971, 16(4): 322-333.

[2] BREZZI F, FORTIN M. Mixed and hybrid finite element methods [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 1991.

[3] BOCHEV P B, GUNZBURGER M D. Finite element methods of least-squares type [J]. Siam Review, 1998, 40(4): 789-837.

[4] BOCHEV P B, GUNZBURGER M D. A locally conservative mimetic least-squares finite element method for the Stokes equations [J]. Large-Scale Scientific Computing, 2010, 5910: 637-644.

[5] PONTAZA J P. A least-squares finite element formulation for unsteady incompressible flows with improved velocity-pressure coupling [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 217(2): 563-588.

[6] PRABHAKAR V, REDDY J N. A stress-based least-squares finite-element model for incompressible Navier-Stokes equations [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 54(11): 1369-1385.

[7] BOCHEV P B, GUNZBURGER M D. Analysis of least-squares finite-element methods for the Stokes equations [J]. Mathematics of Computation, 1994, 63(208): 479-506.

[8] BOCHEV P B, GUNZBURGER M D. Least-squares finite element methods [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2009.

[9] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39/40/41): 4135-4195.

[10] PIEGL L A, TILLER W. The NURBS book [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 1997.

[11] BENSON D J, BAZILEVS Y, HSU M C, et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(13/14/15/16): 1367-1378.

[12] BUFFA A, FALCO C De, SANGALLI G. Isogeometric analysis: stable elements for the 2D Stokes equation [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011, 65(11/12): 1407-1422.

[13] 祝雪峰, 马正东, 胡平. 几何精确非协调等几何NURBS有限元 [J]. 固体力学学报, 2012, 33(5): 487-492.

ZHU Xuefeng, MA Zhengdong, HU Ping. Nonconforming isogeometric analysis based on NURBS with exact geometry [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(5): 487-492.

(编辑 荆树蓉)